ANÁLISIS DEL FENÓMENO DEL SHAKEDOWN FRICCIONAL EN UN CONTACTO COMPLETO

R. C. Sáez, A. Mugadu*, J. Fuenmayor, D. A. Hills*

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales
Universidad Politécnica de Valencia. Camino de Vera, s/n. 46022 Valencia

***Department of Engineering Science**
University of Oxford. Parks Road. OXI 3PJ Oxford

Resumen. En el presente trabajo se estudia el fenómeno del shakedown para el caso de un contacto completo en el que existe un estado de deslizamiento parcial. Este contacto se modelará mediante un indentador rígido plano inclinado de esquinas en ángulo recto que presiona sobre un semiplano incompresible mediante una carga normal constante desplazada de su punto medio y una fuerza tangencial oscilante. El análisis mostrará las analogías que pueden trazarse entre este caso y la nomenclatura plástica, y que bajo ciertas condiciones la utilización del teorema del límite inferior para el shakedown plástico de Melan nos conduce a la eliminación del estado de deslizamiento estacionario.

Abstract. In this paper the phenomenon of frictional shakedown is studied for a complet contact where a stable partial slip exists. This contact is modelled by a tilted square-ended rigid punch pressed against an incompressible half plane by an offset constant normal load and an oscillatory shearing force. The analysis shows some analogies might be drawn between this case and conventional plasticity nomenclature, and that under certain conditions Melan´s lower bound theorem of plastic shakedown may be invoked to get the elimination of steady state slip.

1. INTRODUCCIÓN

El fretting es un daño muy extendido en el campo aeroespacial, de la automoción y de las aplicaciones ingenieriles. Puede encontrarse en uniones de cola de milano o de pestaña, engranajes, rotores de helicópteros o bombas. Todos estos contactos son completos o casi completos por naturaleza, por lo que la presión de contacto en sus extremos es singular o casi singular. Este suceso supone que el fretting, que normalmente ocurre en una pequeña región cercana al borde de contacto, puede ser muy perjudicial.

El shakedown es un término inglés utilizado en el estudio de la plasticidad de materiales. Se puede definir como el fenómeno por el cual un proceso de carga cíclica, lo suficientemente severo en un primer momento como para causar la fluencia del material, induce a la obtención de tensiones residuales, normalmente beneficiosas para el comportamiento de éste.

Los contactos elásticos pueden clasificarse, atendiendo a la geometría de los cuerpos en contacto, en incompletos, completos y "en disminución" (receding). Una explicación detallada de estos tipos de contacto se puede hallar en [4]. El contacto completo es aquel en el que el tamaño de la zona de contacto es independiente de la fuerza de contacto.

En este artículo se pretende conseguir un método de análisis exacto para un problema específico que posee muchas de las características exhibidas por este tipo general de contacto. Se estudiará el caso de un indentador rígido plano inclinado cuadrado (esquinas en ángulo recto).

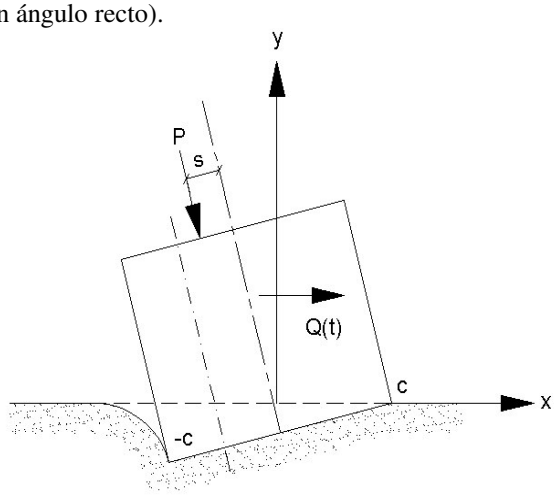


Fig. 1. Indentador rígido plano inclinado cuadrado.

Este punzón tiene un semiancho *c*, está sometido a una fuerza tangencial oscilante *Q(t)* y a una fuerza normal por unidad de anchura *P* constante desplazada del centro del indentador una distancia *s*. La razón de elegir esta geometría se debe a que este modelo posee las características esenciales de ser un contacto completo, siempre y cuando $|s|/c \leq 0.5$ [3], y existe un

estado de deslizamiento parcial estable que puede ser analizado de forma exacta.

Cuando un contacto de este tipo es sometido a una fuerza oscilante se pueden dar tres posibles respuestas iniciales del sistema:

1. Que ningún punto del indentador deslice, es decir, que exista una adherencia completa en la zona de contacto. En este caso la solución inicial y la solución del estado estacionario es la misma.
2. Que algunos de los puntos del indentador alcancen el estado de deslizamiento, mientras que el resto permanezcan en adherencia, es decir, se alcanza un régimen de deslizamiento parcial.
3. Que la totalidad de los puntos del indentador deslicen debido a que se cumple la condición de sólido rígido $|Q|=fP$, donde f es el coeficiente de fricción.

Un segundo objetivo de este trabajo es vislumbrar la analogía entre el comportamiento de este tipo de contacto y el comportamiento de un componente sometido a una deformación elasto-plástica:

- El deslizamiento del punzón será análogo a la deformación plástica (fluencia)
- Las modificaciones superficiales consecuencia del contacto conllevan un incremento en el coeficiente de fricción, lo que supone un aumento de la zona de adhesión a expensas de la zona de deslizamiento, de forma análoga al endurecimiento del material.
- La máxima carga que puede ser soportada sin la aparición de un estado de deslizamiento, incluso en el primer ciclo de carga es análoga, en la teoría de plasticidad, al 'límite elástico'.
- El deslizamiento de la totalidad de la zona de contacto, movimiento de sólido rígido, es análogo al 'estado límite' en teoría de plasticidad.
- La aplicación de una carga cíclica $Q(t)$ a un material elasto-plástico puede provocar la aparición de tensiones residuales que pueden reducir, o incluso eliminar, la posibilidad de una deformación plástica en los siguientes ciclos. Un fenómeno análogo puede aparecer en el caso del contacto que se está estudiando ya que la distribución de tangenciales residuales pueden causar la reducción o eliminación del tamaño del estado de deslizamiento estacionario.
- En un problema elasto-plástico la máxima carga cíclica que puede ser soportada sin un régimen de flujo plástico se conoce como límite de shakedown, análogo al estado estacionario del problema de contacto con carga cíclica donde no se muestra deslizamiento.

En teoría de plasticidad, una cota inferior para el límite de shakedown puede hallarse mediante el teorema de Melan, 'si se puede hallar un estado de tensiones residuales que conjuntamente con el estado tensional producido por las cargas aplicadas permanezca siempre dentro del dominio elástico, el material presentará shakedown'. Este teorema ha sido demostrado rigurosamente para materiales plásticos pero no para problemas de contacto con fricción. En el presente trabajo se mostrará que para este tipo de contacto se puede aplicar el teorema de Melan.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE CONTACTO

El problema de contacto de un indentador rígido plano inclinado cuadrado ha sido estudiado anteriormente en [3]. En particular, se demuestra que, suponiendo una fuerza normal P, que se aplica en la mitad central del indentador **($|s|/c \leq 0.5$),** el contacto será completo y será el caso que nos ocupe en este trabajo. La distribución de presión está dada por la siguiente expresión:

$$p(x)=\frac{P}{\pi\sqrt{c^2-x^2}}\left(1+\frac{2sx}{c^2}\right) \qquad \text{(Ec. 1)}$$

Si ahora se aplica una fuerza tangencial $Q(t)$ monótona creciente, suponiendo que el contacto permanece totalmente en adherencia, la correspondiente distribución de esfuerzos tangenciales $q(x)$ es:

$$q(x)=\frac{Q}{\pi\sqrt{c^2-x^2}} \qquad \text{(Ec. 2)}$$

Si $s<0$, el punto crítico donde se iniciará el deslizamiento es el extremo del contacto $x=c$, y además $q(c)=fp(c)$. El desplazamiento comenzará cuando:

$$\frac{Q}{fP}=1+\frac{2s}{c} \qquad \text{(Ec. 3)}$$

con lo que si $\left(\frac{Q}{fP}<1+\frac{2s}{c}\right)$, no se iniciará el deslizamiento en ningún punto de la zona de contacto. Por tanto, la (Ec. 3) se corresponde al 'límite elástico', y el 'estado límite' para la fuerza tangencial está dado simplemente por $Q/fP = 1$.

Se supone que la fuerza tangencial $Q(t)$ se incrementa de forma monótona hasta un valor a partir del cual la zona de deslizamiento penetra en la zona de contacto desde el extremo derecho, ocupando un intervalo de espacio $[b, c]$ (figura 2)

La ecuación que define el comportamiento del desplazamiento relativo en dirección tangencial $g(x)$ tiene la forma:

$$2\mu\frac{dg(x)}{dx}=\frac{1}{\pi}\int_{contacto}\frac{q(\xi)d\xi}{x-\xi} \qquad \text{(Ec. 4)}$$

donde μ es el módulo de rigidez del semiplano incompresible.

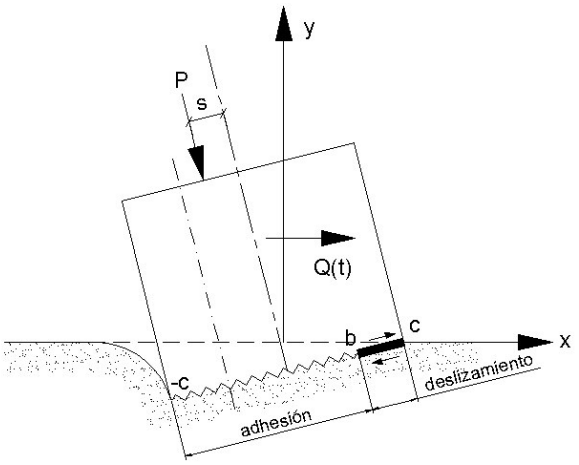


Fig. 2. Zonas de deslizamiento/adherencia durante el incremento monótono de *Q(t)*.

Si la distribución de esfuerzos tangenciales se expresa como:

$$q(x)\begin{cases} fp(x) \text{ si } x\in[b,c] \\ fp(x)+q^*(x) \text{ si } x\in[-c,b] \end{cases} \quad \text{(Ec.5)}$$

donde $\text{sgn}\left(q^*(x)\right)=-\text{sgn}\left(p(x)\right)$. Considerando las ecuaciones (Ec. 1), (Ec. 4) y (Ec. 5) se tiene:

$$2\mu\frac{dg(x)}{dx}=\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{fP}{\pi\sqrt{c^2-\xi^2}}\left(1+\frac{2s\xi}{c^2}\right)\frac{d\xi}{x-\xi}+ \\ +\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{b}\frac{q^*(\xi)d\xi}{x-\xi} \quad \text{(Ec. 6)}$$

El valor de $\frac{dg(x)}{dx}$ es nulo cuando el indentador se encuentra en un estado de adherencia o de reposo (régimen de deslizamiento relativo estacionario), con lo que sustituyendo en la expresión (Ec. 6):

$$\int_{-c}^{b}\frac{q^*(\xi)d\xi}{x-\xi}=-\int_{-c}^{c}\frac{fP}{\pi\sqrt{c^2-x^2}}\left(1+\frac{2s\xi}{c^2}\right)\frac{d\xi}{x-\xi} \quad \text{(Ec. 7)}$$

expresión válida cuando $x\in[-c,b]$ (zona de adherencia).

Resolviendo la integral de Cauchy y utilizando el procedimiento de Riemann-Hilbert [4], sabiendo que $q^*(x)$ debe ser singular en $x=-c$ y acotada en $x=b$, se tiene:

$$q^*(x)=\frac{2fPs}{\pi c^2}\sqrt{\frac{b-x}{c+x}}, \quad \text{si } x\in[-c,b] \quad \text{(Ec. 8)}$$

Se puede obtener una expresión que relacione el tamaño de la zona de adhesión con el valor de la fuerza tangencial sabiendo que la integral de la (Ec. 5) sobre la totalidad de la zona de contacto debe ser igual al valor de la fuerza tangencial, con lo que

$$\frac{s}{c}=\frac{\frac{Q}{fP}-1}{1+\frac{b}{c}} \quad \text{(Ec. 9)}$$

Cuando el primer punto de la zona de contacto comience a deslizar, *b/c=1*, la (Ec. 9) se convierte en la (Ec. 3). Cuando todos los puntos de la zona de contacto tiendan a deslizar, movimiento de sólido rígido, $b/c \rightarrow -1$, y entonces $Q/fP \rightarrow 1$.

El siguiente paso es calcular el campo de desplazamientos *g(x)* para la zona de deslizamiento. Partiendo de la (Ec. 6) y considerando que el intervalo de interés es $x\in[b,c]$ se tiene:

$$2\mu\frac{dg(x)}{dx}=\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{fP}{\pi\sqrt{c^2-x^2}}\left(1+\frac{2s\xi}{c^2}\right)\frac{d\xi}{x-\xi}+ \\ +\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{b}\frac{2fPs}{\pi c^2}\sqrt{\frac{b-\xi}{c+\xi}}\frac{d\xi}{x-\xi} \quad \text{(Ec.10)}$$

y resolviendo:

$$2\mu\frac{dg(x)}{dx}=-\frac{2fPs}{\pi c^2}\sqrt{\frac{x-b}{x+c}}, \quad \text{si } x\in[b,c] \quad \text{(Ec. 11)}$$

La expresión para el deslizamiento relativo se obtiene por integración de la (Ec. 11), obteniéndose:

$$g(x)=\frac{fPs}{\mu\pi c^2}(-\sqrt{x^2+(c-b)x-bc}+ \\ +\frac{b+c}{2}\ln\left(\frac{2\sqrt{x^2+(c-b)x-bc}+2x+c-b}{c+b}\right)) \quad \text{(Ec. 12)}$$

Si a continuación se procede a una reducción infinitesimal de la fuerza tangencial se obtendrá un estado de adhesión en la totalidad de la zona de contacto. Una reducción adicional en la carga tangencial nos conduce a una permanencia del estado de adherencia, en el que podrá distinguirse una zona que no ha deslizado [*-c, b*] y otra zona de deslizamiento relativo estacionario [*b, c*], hasta que la distribución de la presión de contacto no pueda soportar más esta situación (ver figura 3).

A partir de este momento comienza a desarrollarse una región de deslizamiento reverso desde el punto más crítico, situado en el extremo derecho del contacto $x=c$. Se supone que el decremento de *Q(t)* ha sido tal que ha provocado que la zona de adherencia se reduzca a [*-c, b_1*], y por tanto el nuevo intervalo de deslizamiento es [b_1, *c*] (figura 4).

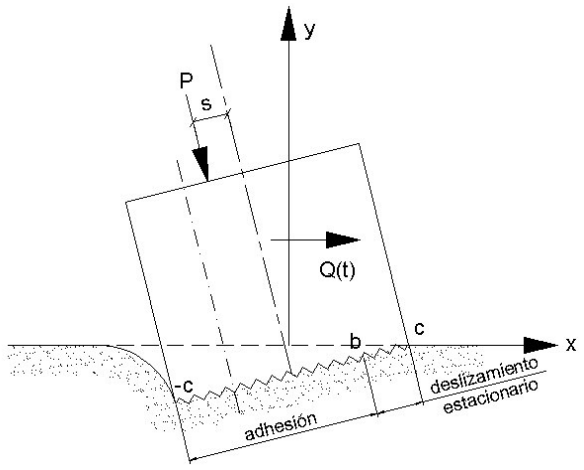


Fig. 3. Zonas de deslizamiento/adherencia cuando *Q(t)* disminuye infinitesimalmente.

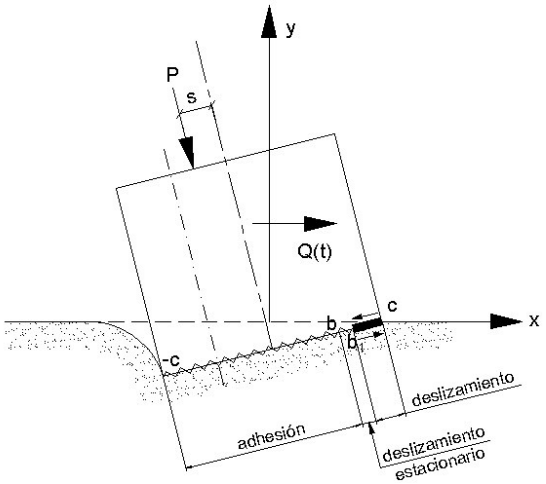


Fig. 4. Zonas de deslizamiento/adherencia cuando *Q(t)* se reduce un valor finito

Para determinar la distribución de tangenciales y el deslizamiento relativo se procede de modo similar al seguido anteriormente, con lo que la nueva distribución de tangenciales queda:

$$q(x)\begin{cases} -fp(x) & \text{si} \quad x\in[b_1,c] \\ -fp(x)+q^{**}(x) & \text{si} \quad x\in[-c,b_1] \end{cases} \qquad \text{(Ec. 13)}$$

donde $\operatorname{sgn}\left(q^{**}(x)\right)=-\operatorname{sgn}\left(-p(x)\right)$. Sustituyendo en la (Ec. 4) queda:

$$2\mu\frac{dg(x)}{dx}=2\mu g'(x)=\frac{1}{\pi}\int_c^{b_1}\frac{q^{**}(\xi)d\xi}{x-\xi}+ \\ +\frac{1}{\pi}\int_c\frac{-fP}{\pi\sqrt{c^2-\xi^2}}\left(1+\frac{2s\xi}{c^2}\right)\frac{d\xi}{x-\xi} \qquad \text{(Ec.14)}$$

donde el valor de *g´(x)* es conocido para la zona de adherencia y la zona de deslizamiento relativo estacionario [*-c, b1*]:

$$\begin{cases} \text{si } b_1<b\rightarrow g'(x)=0 \quad \text{si} \quad x\in[-c,b_1] \\ \text{si } b<b_1 \begin{cases} g'(x)=0 \quad \text{si} \quad x\in[-c,b] \\ 2\mu g'(x)=(Ec.11) \quad \text{si} \quad x\in[b,b_1] \end{cases} \end{cases} \qquad \text{(Ec. 15)}$$

El caso de $b<b_1$ es más general y por lo tanto más interesante que $b_1<b$, y será con el que trabajemos. Utilizando las ecuaciones (Ec. 14) y (Ec. 15) se tiene:

$$\int_{-c}^{b_1}\frac{q^{**}(\xi)d\xi}{x-\xi}=\frac{2fPs}{\pi c^2}+\frac{2\mu g'(x)}{\pi}, \quad \text{si} \quad x\in[-c,b_1] \qquad \text{(Ec. 16)}$$

La (Ec. 16) no tiene solución analítica exacta, por lo que se procederá a su resolución numérica utilizando para ello la discretización de la cuadratura de Gauss-Jacobi [5]. Las condiciones de contorno impuestas al comportamiento de $q^{**}(x)$ son: singular en $x=-c$ y acotada en $x=b_1$, con lo que se llega a:

$$q^{**}(u)=\phi(u)\sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \qquad \text{(Ec. 17)}$$

$$\frac{2}{2n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\phi(u_i)(1-u_i)}{v_k-u_i}=\frac{2fPs}{\pi c^2}+2\mu g'(v_k) \qquad \text{(Ec. 18)}$$

donde $k=1\ldots n$, y

$$u_i=\cos\left(\frac{2\pi i}{2n+1}\right) \\ v_k=\cos\left(\frac{2k-1}{2n+1}\pi\right) \qquad \text{(Ec. 19)}$$

La ecuación (Ec. 18) da lugar a un conjunto de *n* ecuaciones con *n* incógnitas, $\phi(u_i)$, que puede ser resuelto numéricamente, y posteriormente utilizarlas en (Ec. 17) para obtener $q^{**}(u_i)$ de forma discretizada.

La fuerza tangencial resultante puede ser hallada forzando el equilibrio en la zona de contacto como:

$$Q=\int_{contacto}q(x)=\int_{-c}^{c}-fp(x)dx+\int_{-c}^{b_1}q^{**}(x)dx \qquad \text{(Ec. 20)}$$

g´(x) puede hallarse a partir de la ecuación (Ec. 14) para $x\in[b_1,c]$, es decir, para la zona de deslizamiento, de manera numérica. Decir que este valor representa el 'gradiente total' del deslizamiento relativo, es decir, el gradiente en el estado final. Si se quisiera hallar el incremento de esta magnitud asociado a la fase de descarga se podría calcular como:

$$\Delta g'(x)=g'(x)_{total}-g'(x)_{etapa\ anterior} \qquad \text{(Ec. 21)}$$

y a partir de éste se podría calcular el deslizamiento relativo:

$$\Delta g(x) = \int_{b_1}^{x} \Delta g'(x)dx \qquad \text{(Ec. 22)}$$

3. SHAKEDOWN FRICCIONAL

El método presentado puede utilizarse para determinar las condiciones bajo las cuales el punzón sufrirá shakedown. Sin embargo, un procedimiento más directo y con coste computacional nulo para el cálculo de estas condiciones consistiría en la aplicación del Teorema de Melan para el límite inferior del shakedown plástico.

Se supone que la carga tangencial *Q(t)* alcanza su máximo valor en Q_{max}. Se sabe que si la carga sufre un decremento infinitesimal se llega a una situación de completa adhesión en la zona de contacto (figura 3). La cuestión es: ¿hasta qué valor se puede reducir *Q(t)*, desde Q_{max}, para que todavía se mantenga el régimen de adherencia en toda la zona de contacto?. Llamando $q(x)_{max}$ y $q(x)_{min}$ a las distribuciones de tangenciales para los valores máximo, Q_{max}, y mínimo, Q_{min}, de *Q(t)* respectivamente, las condiciones para que presente shakedown friccional pueden expresarse como:

$$\begin{cases} q(x)_{\max} + q(x)_{residual} \le fp(x) \\ q(x)_{\min} + q(x)_{residual} \ge -fp(x) \end{cases} \qquad \text{(Ec. 23)}$$

donde $q(x)_{residual}$ es la distribución de tangenciales residuales. Reseñar que el punto crítico para el inicio del deslizamiento, para las condiciones de estudio, se corresponde con el extremo derecho de la zona de contacto, *x=c*. La (Ec. 23) puede resolverse para el caso límite, es decir, tomando las igualdades y resolviendo el sistema de ecuaciones, obteniéndose:

$$q(x)_{\max} - q(x)_{\min} = \Delta q(x) = 2\, fp(x) \qquad \text{(Ec. 24)}$$

donde *Δq(x)* representa la variación de la distribución de tangenciales durante el proceso de descarga hasta el momento donde comienza a deslizar el primer punto, y donde se conoce que existe un régimen de completa adhesión, por lo que por analogía a (Ec. 2) se tiene:

$$\Delta q(x) = \frac{\Delta Q}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}} \qquad \text{(Ec. 25)}$$

y sustituyendo en (Ec. 24) las expresiones (Ec. 1) y (Ec. 25) se obtiene

$$\frac{\Delta Q}{fP} = 2\left(1 + \frac{2sx}{c^2}\right) \qquad \text{(Ec. 26)}$$

y como el punto crítico para el comienzo del deslizamiento es *x=c*:

$$\frac{Q_{\max} - Q_{\min}}{fP} = 2\left(1 + \frac{2s}{c}\right) \qquad \text{(Ec. 27)}$$

4. RESULTADOS

Como ilustración de los resultados obtenidos durante la fase de incremento de *Q(t),* la figura 5 muestra la distribución de tracciones tangenciales correctiva $q^*(x)$ y la resultante *q(x)* para el caso de *Q/fP=0.7* y *s/c=-0.3*, obteniéndose, según (Ec. 11), que el tamaño de la zona de adhesión es b/c=0.

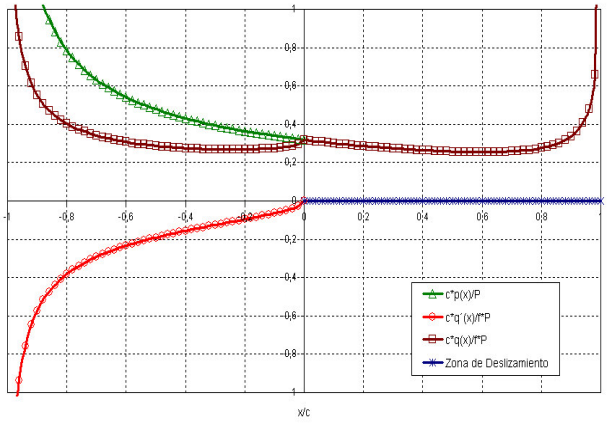


Fig. 5. Representación de *fp(x)*, *q(x)* y $q^*(x)$ en el primer ciclo de carga para un valor *Q/fP=0.7*, *s/c=-0.3*

Como ilustración de los resultados obtenidos durante el proceso de decremento de *Q(t)*, la figura 6 muestra la distribución de tensiones tangenciales resultante *q(x)* y la distribución de tangenciales correctiva $q^{**}(x)$ para el caso de $Q_{max}/fP=0.7$, $Q_{max}/fP=-0.4$, *s/c= -0.3*.

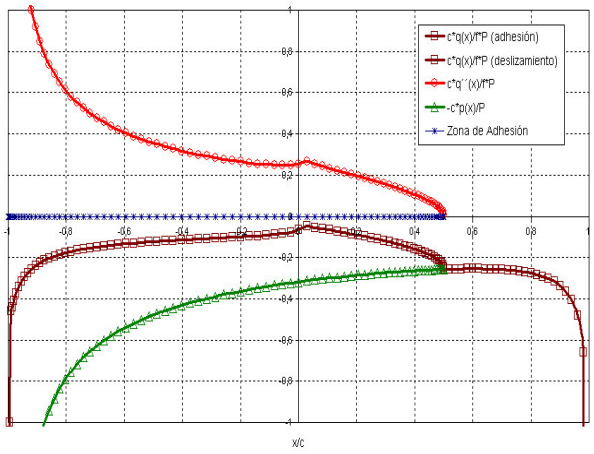


Fig. 6 Representación de *fp(x), q(x)* y $q^{**}(x)$ durante la descarga para $Q_{max}/fP=0.7$, $Q_{min}/fP=0.7$, *s/c= -0.3*

Como ejemplo de aplicación de (Ec. 27), para las condiciones de carga con las que se ha trabajado durante este trabajo, $Q_{max}/fP \le 0.7$, *s/c= -0.3*, se tiene

que $\Delta Q/fP \leq 0.8$, con lo que el límite de shakedown tiene un valor de $Q_{min}/fP \leq -0.1$, es decir, a partir de este valor comenzaría a producirse deslizamiento reverso.

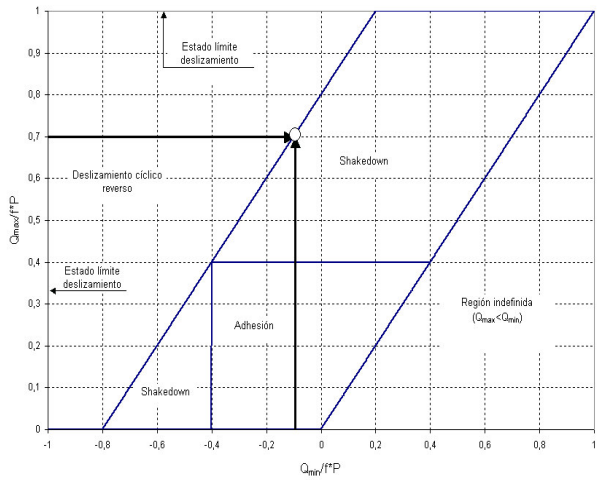


Fig. 7. Gráfica del comportamiento de un indentador rígido inclinado si $s/c=-0.3$

La región de 'adhesión' se corresponde con la condición dada por la (Ec. 3), donde el indentador permanecerá en total adhesión en el primer cuarto de ciclo de carga mientras $Q/fP \leq 0.4$. Además, mientras se satisfaga la ecuación (Ec. 27), y en este caso $\Delta Q/fP \leq 0.8$, se mantiene el estado de total adhesión en la zona de contacto durante la descarga del punzón. Con referencia a la nomenclatura plástica, la región se corresponde con el 'límite elástico' ya que no se produce ningún deslizamiento.

La región marcada como 'shakedown' representa la combinación de Q_{max}/fP y Q_{min}/fP para las cuales sólo se obtiene un régimen de deslizamiento en el primer cuarto del ciclo de carga, permaneciendo en total adhesión la zona de contacto durante las sucesivas descargas. En esta zona se satisface la (Ec. 27). También se incluye en la figura 7 una región llamada 'deslizamiento cíclico reverso'. Para las combinaciones de Q_{max}/fP y Q_{min}/fP que nos sitúan dentro de esta zona, el punzón deslizará tanto durante el proceso de carga como de descarga. Adicionalmente, se indican las condiciones que hacen que el indentador tenga un movimiento de sólido rígido, todo el punzón deslizando, y que se corresponde con el término de 'estado límite' en la nomenclatura plástica, y que se corresponde con $Q_{max}/fP=1$ y $Q_{min}/fP=-1$.

5. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un procedimiento numérico para determinar las condiciones bajo las cuales un indentador rígido plano inclinado cuadrado en contacto con un semiplano incompresible sometido a una fuerza normal constante desplazada del centro del punzón y a una fuerza tangencial oscilante sufrirá el fenómeno de shakedown. Se ha demostrado también que un método más sencillo y directo para el cálculo del límite de shakedown es la utilización del teorema de Melan para el límite inferior de shakedown plástico, y para ello se han definido las condiciones bajo las cuales el indentador soportará shakedown. Se han trazado un conjunto de analogías entre el problema de contacto en estudio y la nomenclatura plástica tales como 'límite elástico', 'estado límite'.

Aunque el teorema de Melan no ha sido demostrado rigurosamente para problemas de contacto con fricción, el trabajo realizado muestra que sí es válido para este tipo de contacto en particular.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer al Ministerio de Educación, Cultura y Deporte la ayuda concedida a través del Programa para la Formación de Profesorado Universitario. Así mismo agradecen al Ministerio de Ciencia y Tecnología el apoyo recibido a través del proyecto DPI2001-2400-C02-02

REFERENCIAS

[1] Mugadu, A., Sackfield, A y Hills, D. A., "Analysis of a Rocking and Walking Punch Part I: initial, transient and steady state", J. Mechs. Phys. Solids, (2002), under review.

[2] Hills, D. A. y Sackfield, A., "Analysis of a 'walking' punch", Contact Mechanics, Kluwer Academic Publishers, (2002), Dordrecht, The Netherlands.

[3] Sackfield, A., Truman, C. E. y Hills, D. A., "The tilted punch under normal and shear load (with application to fretting tests", Int. J. Mech. Sci., (2001), 43, pp. 1881-1892.

[4] Hills, D. A., Nowell, D. y Sackfield, A., "Mechanics of Elastic Contact", Butterworth-Heinemann, (1993), Oxford.

[5] Muskhelishvili, N. I., "Some basic problems of the mathematical theory of elasticity", (1953), Groningen, Noordhoff.